Def. **Ottimizzazione**

Ottimizzazione significa massimizzazione o minimizzazione di una funzione di un insieme di variabili, soggetta ad alcuni vincoli sui possibili valori che tali variabili possono assumere.

Def. **Modello Matematico**

Il modello (matematico) è una descrizione, per mezzo di relazioni di tipo logico-matematico, del problema di interesse. Il problema viene rappresentato attraverso un insieme di dati noti e variabili incognite che interagiscono in un unico sistema di relazioni.

Def. **Variabili decisionali**

Le quantità su cui è possibile intervenire e che sono oggetto di decisione

Def**. Funzione obiettivo**

La quantità che si vorrebbe massimizzare o minimizzare espressa come funzione delle variabili

Def. **Vincoli**

Restrizioni sui valori che le variabili decisionali possono assumere

**PROGRAMMAZIONE LINEARE**

Ass. **Continuità**

Una variabile di decisione può assumere tutti i valori reali (nel suo intervallo di ammissibilità) e quindi le variabili posso avere valore frazionario. Una variabile può assumere un qualsiasi valore reale, quindi anche un valore intero (ma non necessariamente)

Ass. **Certezza**

I valori dei parametri che definiscono un problema (input) sono considerati *certi* (veri) e quindi la significatività del modello e la sua soluzione sono strettamente legati ad essi. In una stesso modello, valori differenti dei parametri generano una diversa realizzazione dello stesso problema.

Ass. **Proporzionalità**

Il contributo di una variabile di decisione in ogni funzione è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa

Ass. **Additività**

Il contributo di più variabili di decisione in ogni funzione è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.

Def. **Funzione Lineare**

Una funzione reale di n variabili reali si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

1. per ogni coppia di vettori reali x, y si ha:
2. per ogni vettore reale x e ogni scalare λ si ha:

Prop.

Una qualsiasi funzione lineare può essere scritta nella forma:

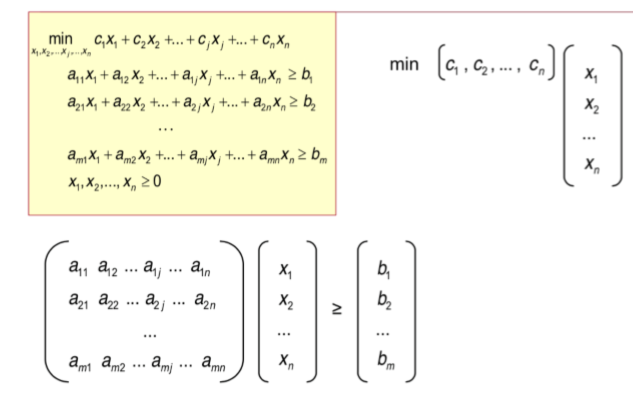
Dim.

Una funzione della forma soddisfa sempre le condizione i) e ii) della definizione della funzione lineare

Quindi sia una funzione che soddisfa le condizione i) e ii) e sia la base canonica dello spazio vettoriale per cui, per ogni x in si ha:

Utilizzando proprietà di linearità si può scrivere:

Def. **Min**



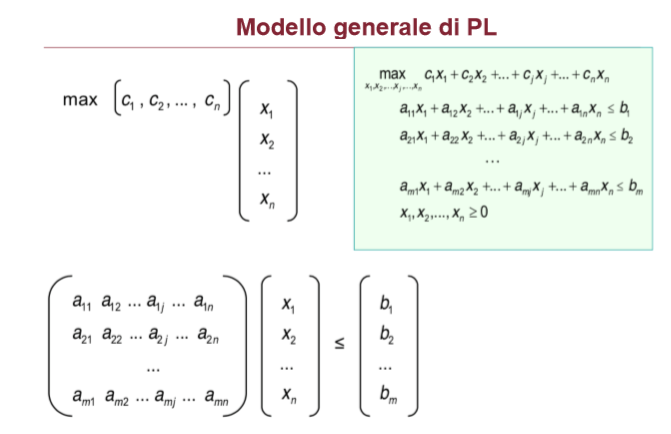
Minimizzazione dell’input (risorsa) per realizzare un prefissato livello di output (prestazione) minimo richiesto

Prop.

Il problema può essere sempre ricondotto alla forma :

Dim.

Def. **Max**



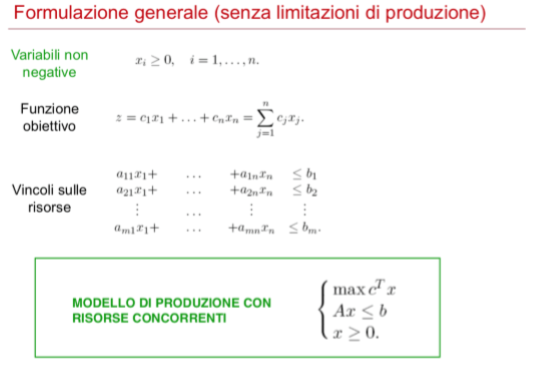
Massimizzazione dell’output (prestazione) ottenibile da una prefissata quantità di input (risorsa) massima disponibile

Prop.

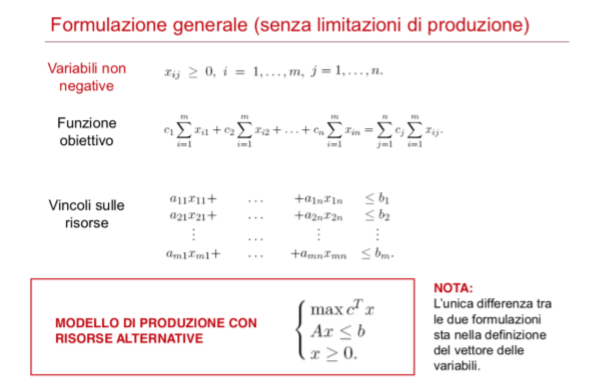
Il problema può essere sempre ricondotto alla forma :

Dim.

**Modello Produzione con *Risorse Concorrenti***



**Modello di Produzione con *Risorse Alternative***



**Formulazione Problema Trasporto M1**

origini e destinazioni

Si indichi la quantità disponibile all’origine *i* con e la quantità richiesta alla destinazione *j*

Si inoltre il costo unitario di trasporto dall’origine *i* alla destinazione *j*

Th. **Modello Trasporto Bilanciato (M1)**

Il modello del trasporto M1 ammette soluzioni ammissibili se e solo se nella realizzazione del problema l’offerta eguaglia la domanda totale, nel qual caso il problema di trasporto si dice bilanciato. (Domanda Totale = Offerta Totale)

Oss.

Se ***Offerta > Domanda*** vi è la possibilità di soddisfare pienamente la domanda (il problema è ammissibile). Se la quantità di energia prodotta in eccesso non verrà inviata alle città, si verificheranno *giacenze nelle origini*, mentre, se tutta l’energia prodotta verrà inviata fuori dalle origini, la quantità in eccesso andrà persa perché non verrà utilizzata dalle città, si genereranno *giacenze nelle destinazioni*. ( ***Alcuni vincoli potranno essere non attivi*** -> giacenza)

Se ***Offerta < Domanda*** non vi è possibilità di soddisfare tutte le domande delle città perché nelle origini considerate non si produce energia a sufficienza. La realizzazione del problema è non ammissibile.

**Formulazione Problema Trasporto M2**

origini e destinazioni

Si indichi la quantità disponibile all’origine *i* con e la quantità richiesta alla destinazione *j*

Si inoltre il costo unitario di trasporto dall’origine *i* alla destinazione *j*

Def. **Spazio Vettoriale**

Si definisce uno spazio vettoriale (o spazio lineare) di dimensione n (e si indica con ) un ***insieme di vettori in*** chiuso rispetto alle operazioni di

1. Somma tra due vettori
2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Lo stesso è uno spazio vettoriale di dimensione n

Def. **Punto di Ottimo**

Il punto di Ottimo si trova nell’intersezione delle due rette che delimitano la regione in cui i vincoli sui vari requisiti del problema sono soddisfatti.

Lemma

Sia data la seguente famiglia di rette parallele

Con e reali fissati e c in R. Il vettore  individua una *direzione ortogonale*  alle rette della famiglia ed è orientato dalla parte in cui si trovano le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c, cioè dalla parte in cui ci si sposta dalla retta verso nel semipiano

Dim.

Dobbiamo dimostrare:

1. Il vettore individua una ***direzione ortogonale*** alle rette

Consideriamo un valore c fissato e due punti v e w appartenenti alla retta tale che:

e

Sottraendo si ottiene :

Infatti si ha che

1. Fissato c, il vettore è  ***orientato da verso il semipiano***

Consideriamo un valore c fissato e un punto ***y tale che***

Si ha che : e

Sottraendo si ottiene:

Infatti si ha:

**Metodi Ricerca Soluzione Ottima**

1. ***Enumerativo***
   1. Valutazione le funzione obiettivo in tutti i punti di intersezione tra le due rette per individuare poi i vertici
      1. Per Ogni punto di *intersezione* si deve eseguire un controllo di appartenenza del punto alla regione ammissibile
   2. Valutare la funzione obiettivo in tutti i vertici
      1. ***Bisogna saper riconoscere i vertici*** 
         1. I Vertici della regione potrebbero essere comunque troppi per una enumerazione
      2. Occorre una strategia per una valutazione sistematica dei vertici nella regione ammissibile
2. ***Strategia del metodo del Simplesso***
   1. A partire da un vertice ammissibile viene generata una sequenza di vertici ammissibili adiacenti, che corrispondono cioè a “estremi” opposti dello stesso “spigolo”.
      1. La strategia del metodo del Simplesso è migliore di quella del metodo enumerativo ma che essa ***non*** è efficiente dal punto di vista teorico, ma è efficiente in pratica

Def. **Intorno di punto x**

Sia x un punto di e una distanza d (distanza euclidea), si definisce ***intorno di x di raggio***

L’insieme

Def. **Chiusura di un insieme S**

Sia dato un insieme S in . Il punto x appartiene alla ***chiusura di S, cl(S),*** se

Def. **Insieme Chiuso**

Dato un insieme S in , S di dice ***chiuso*** se

Def. **Punto Interno**

Sia dato un insieme S in . Il punto x appartiene all’***interno di S, int(S)***, se

Def. **Insieme Aperto**

Se S=int(S), allora S di dice ***aperto***

Def. **Punto di Frontiera**

Sia dato un insieme S in . Il punto x appartiene alla ***frontiera di S, δS,*** se per ogni

Def. **Semipiano**

Sia

Oppure

Def. **Iperpiano**

Sia

Oppure

N.B.

* Dato un iperpiano H in , esso genera in due ***semispazi chiusi***:

e

* ***L’insieme vuoto*** può essere sempre visto come l’intersezione di un ***numero finito*** di semispazi, ad esempio per fissati a e b:
* L’insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di PL può sempre essere visto come l’intersezione di un ***numero*** finito di semispazi, ad esempio:

Def. **Combinazione lineare**

Un vettore è ***combinazione lineare*** dei vettori se esistono k reali tali che

* Se la combinazione si dice ***affine***
* Se la combinazione si dice ***conica***
* Se la combinazione si dice ***convessa***

Def. **Combinazione convessa di due vettori**

Dati x,y, in e un numero reale α, , la ***combinazione convessa di x e y*** è il vettore:

Def. **Segmento**

Dati x,y, in e il ***segmento di estremi x e y, [xy]***, è l’insieme dei punti z che sono combinazioni convesse di x e y, cioè:

Def. **Insieme Convesso**

Un insieme C in è ***convesso*** se comunque presi x e y in C, si ha che:

Prop. **Semipiano è insieme convesso**

Un semipiano S in è un insieme ***convesso***

Dim.

Per qualsiasi x,y in e z in [xy], si ha che:

Prop. **Intersezione insiemi convessi è convessa**

Ogni intersezione insiemi convessi è convessa.

Dim.

Siamo k insieme e siano x e y due vettori appartenenti alla loro intersezione. Siccome tutti gli insiemi , sono convessi, il segmento [xy] è interamente contenuto in ciascuno di essi e, dunque, nella loro intersezione.

N.B.

Insieme vuoto è convesso.

Def. **Poliedro**

Un insieme P in si dice ***poliedro*** se esiste una matrice reale e un vettore reale tali che:

Un insieme P in si dice ***poliedro*** se è l’intersezione di un ***numero finito***  di semispazi.

N.B

* Insieme vuoto ***è un poliedro***
* ***è un poliedro***
* L’iperpiano H e il semipiano S ***sono poliedri***
* ***Ogni poliedro è un insieme convesso***

Def. **Poliedro in Forma Standard**

Data reale con e un ***poliedro in Forma Standard*** è definito:

Def. **Punto Intermedio**

Sia x un punto di P in . Il punto x si dice ***intermedio*** se esistono due punti y e w in P, :

Def. **Punto Estremo**

Sia x un punto di P . Il punto x si dice  ***punto estremo di P*** se ***non è*** punto intermedio di P. In altre parole, se per due punti y e w in P, e si ha sempre che:

Def. **Vertice**

Un punto x del poliedro P in è un ***vertice*** di P se esiste un vettore c in tale che

In altre parole, x ***vertice*** di P se esiste un iperpiano H***, che interseca P solo nel punto x,*** rispetto al quale P si trova tutto in

Quindi anche

Def. **Rette contenuto nel poliedro P**

Si dice che un poliedro P ***contiene una retta*** se esiste un punto x in P e un vettore in :

Def. **Semirette contenute nel poliedro P**

Si dice che un poliedro P ***contiene una semiretta*** se esiste un punto x in P e un vettore in :

Def. **Insieme Limitato**

Un insieme S in è ***limitato*** se esiste M>0 tale che per ogni x in S si ha:

Def. **Politopo**

Un Poliedro P in si dice ***politopo*** se è ***chiuso e limitato***

Un politopo ***non contiene né rette né semirette.***

Def. **Diseguaglianza Valida**

Una diseguaglianza si dice ***valida*** per un poliedro se:

Def. **Faccia di un poliedro**

Dato un poliedro e un suo iperpiano di supporto , l’insieme

si dice ***faccia di P.*** La faccia di un poliedro è un poliedro.

Def. **Dimensione Faccia**

La ***dimensione*** di una faccia F di è uguale a ***n-numero di vincoli linearmente indipendenti attivi per tutti gli x in F.***

* In un vertici sono attivi *n* vincoli linearmente indipendenti => Il ***vertice*** è una faccia di P di dimensione
* Se una faccia ha ***dimensione 1*** può essere
  + Segmento 🡪 faccia è detta ***spigolo***
  + Semiretta 🡪 faccia è detta ***raggio estremo***
  + Retta 🡪 faccia è detta ***retta estrema***
* Se ***dim(F)=dim(P)-1*** si dice che F è una ***faccia massimale di P***

Def. **Vincolo Attivo**

Dato un vincolo , se per un vettore in si ha allora si dice che il vincolo è ***attivo in***

Dato un poliedro e un punto  ***in P***, indichiamo con l’insieme dei vincoli attivi in , cioè

Lemma **Fondamentale**

Siano dati i vettori in . Se il numero di vettori linearmente indipendenti tra è ***strettamente minore di n***, allora esiste un vettore ***d in***  tale che:

Dim.

Siccome il numero di vettori linearmente indipendenti è strettamente minore di n, la matrice  ***che ha per righe i vettori***  ha rango R(A) strettamente minore di n.

Allora le n colonne di A ,***sono linearmente dipendenti***, cioè esistono ***reali non tutti nulli***, tali che:

Riscrivendolo rispetto alle righe:

Th. **Caratterizzazione dei punti estremi/vertici di un poliedro P**

Siano dati un poliedro e un punto ***x in P***. Il punto ***x è un punto estremo***  di P ***se e solo se*** esistono n righe tra me m della matrice A tali che:

* i appartiene a ***l(x)*** (il vincolo i è attivo in x)
* sono ***linearmente indipendenti***

Dim.

**1) Necessità**

Utilizzando la dimostrazione per assurdo:

*Ipotesi*: è un punto estremo di P

*Tesi* che ci siano n vincoli linearmente indipendenti in l(x)

Per semplicità in questo teorema assumiamo

Più in generale si può avere , il risultato del teorema rimane valido anche per questo caso più generale

Supponiamo quindi che *per assurdo* che il numero k di vincoli linearmente indipendenti in l(x) sia . Allora per il Lemma Fondamentale esiste ***d in*** , tale che

Consideriamo i due vettori y e z in definiti come segue per :

Con

Dimostriamo che, ***per un sufficientemente piccolo y e z sono punti di P***, verificando prima i vincoli attivi in x e poi quelli non attivi in x.

Per *i in l(x)* si ha:

Per *i non in l(x)* e per sufficientemente piccolo si ha:

Notando che

Allora y e z soddisfano e dunque appartengono a P

Verifichiamo ora che ***x è combinazione convessa di y e z*** :

Dunque risulta in P con e , che risulterebbe essere *un punto intermedio di P*

Ma questa è ***una contraddizione*** perché per Ipotesi era stato considerato x come ***punto estremo*,** questo implica che i vincoli attivi in x linearmente indipendenti sono *n*

**2) Sufficienza**

*Ipotesi*: e ci sono *n* vincoli attivi linearmente indipendenti in l(x)

*Tesi*: x è un punto estremo di P

Siano , i in l(x), n righe linearmente indipendenti.

Supponiamo *per assurdo* che ***x non sia un punto estremo di P*** e quindi che sia un punto intermedio (esistono altri punti in P). In particolare devono esistere due punti ***y e z in P*** , , tali che

Siccome y e z sono in P implica che:

In particolare, però, per *i in l(x)* deve valere :

N.B.

Infatti, se cosi non fosse, ***per qualche i in l(x),*** avremmo:

Che ovviamente è impossibile perché sappiamo *per ipotesi* che per ogni ***i in l(x)***

Ritornando a sopra abbiamo che il sistema ammette 3 soluzioni , ma ciò non è possibile dato che tale sistema ammette ***un'unica soluzione***, questo implica che ***x è un punto estremo.***

N.B.

* Se la matrice ha un numero di *righe* ***linearmente indipendenti*** < n 🡪 P non ha punti estremi/vertici
* Se m<n 🡪 ***P non ha vertici***
* Se m>=n 🡪 Per ogni vertice x di P, esistono in l(x), n righe di A linearmente indipendenti che determinano il sistema di cui x è *soluzione unica:*  ***🡪 P ha un numero di vertici al più pari a***

Th. **Regione Ammissibile**

Si consideri un poliedro con e . Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. P non contiene rette
2. P ha almeno un vertice
3. Esistono n vettori tra , ***linearmente indipendenti***

Dim.

1. 🡪 2)

Siccome , consideriamo un in P e il corrispondente l()

*2 CASI :*

1. Esistono *n righe* con i in l() linearmente indipendenti 🡪 Per il teorema di caratterizzazione ***è un vertice di P***
2. Il numero di righe con i in l() linearmente indipendenti è ***k<n*** 🡪 Per il Lemma esiste tale che:

Consideriamo allora la ***retta*** e si un qualsiasi punto della retta, *per ogni i in l()*si ha:

Cioè, tutti i vincoli attivi in rimangono in tutti i punti z sulla retta

Siccome per ipotesi ***P non contiene rette***, deve esistere una riga tra quelle non in l() per cui il ***vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d***.

Esistono e tali che:

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga ***non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe con i in l,*** cioè, con i in l( e sono k+1 righe linearmente indipendenti.

Infatti, se *per assurdo* cosi non fosse, avremmo:

Con per ogni i in l

Ma, post-moltiplicando per d a destra e sinistra della relazione sopra:

E ciò nella (1) comporterebbe che:

Che ovviamente è ***impossibile*** perché sappiamo er ipotesi che il vincolo j ***non è attivo***

Siccome per ipotesi  ***P non contiene rette,*** deve esistere una riga tra quelle non in l() per cui ***il vincolo j è violato da qualche z lungo la direzione d,*** cioè esiste ***reale******fissato*** tale che:

Esistono e tali che:

Inoltre, possiamo dimostrare che la riga ***non può essere ottenuta come combinazione lineare delle righe con i in l,*** cioè, con i in l( e sono k+1 righe linearmente indipendenti.

Spostandosi da al punto si ha:

* I vincoli attivi in *rimangono attivi in*
* Il vincolo j *non attivo in*
* Il vincolo j *è linearmente indipendente* rispetto ai vincoli in l()

Il numero di vincoli attivi linearmente indipendenti in ***aumenta rispetto a quelli in***  e si ha:

A questo punto chiamando , si ripresentano per gli stessi due casi visti in precedenza per :

*2 CASI:*

1. esistono n righe in l() linearmente indipendenti e ***è un vertice di P***
2. Si ripete per lo stesso procedimento visto per per individuare ***un nuovo punto*** e un vincolo j non in l(), ma in l() e linearmente indipendenti da quelli in l()

Dopo al più n passi si individua necessariamente un punto con n vincoli in l() linearmente indipendenti, cioè, per il teorema di caratterizzazione, ***un vertice di P*** P ha almeno un vertice

1. 🡪 3)

Sia x il vertice di P. Sotto l’ipotesi 2), per il ***teorema di caratterizzazione***, esistono n vincoli attivi x che corrispondono a n righe linearmente indipendenti tra m righe della matrice A

in A esistono n vettori linearmente indipendenti

1. 🡪1)

Siano le prime n righe di A

Supponiamo *per assurdo* che ***P contenga una retta,*** cioè esiste un e una direzione , tali che:

Ma si deve anche avere:

Infatti, ***se per assurdo cosi non fosse***, avremmo:

Con la conseguenza che, in corrispondenza di questo , per i punti sulla retta avremmo:

e potremmo cosi sempre trovare un reale (positivo se , negativo se ) per cui risulti , *violando cosi il vincolo i-esimo*.

***Ciò è impossibile perché (sotto l’ipotesi assurda) tutti i punti z della retta sono in P (ammissibili).***

Ma si deve avere

In particolare si ha: con ,

***Contraddizione:*** Perché ciò vorrebbe dire che sono linearmente indipendenti P non può contenere rette

Th. Fondamentale della PL (ottimalità)

Si consideri il problema di PL nella forma seguente (P1):

Supponiamo che il poliedro associato al problema (P1) ***non contenga rette*** (o, equivalentemente, abbia almeno un vertice).

Allora ***una ed una sola***  delle seguenti affermazioni ***è vera***:

1. Il problema (P1) ***non è ammissibile*** (cioè )
2. e il problema (P1) è ***illimitato inferiormente (OI)***
3. e il problema (P1) ***ammette ottimo finito*** e almeno una delle soluzioni ottime di (P1) è vertice di P

N.B.

* Se il poliedro P è un ***politopo non vuoto,*** allora il problema di PL:

Ha un ottimo finito in un vertice

* Se il problema di PL è della forma seguente (P2):

Con I e u i vettori in , allora il poliedro che corrisponde alla regione ammissibile ***è un politopo*** e, per quello scritto sopra il problema (P2) ha ottimo finito in un vertice.

Th. **3**

Sia dato un problema di PL nella forma (P1)

Con regione ammissibile . ***L’insieme delle soluzioni ottime di (P1) è un poliedro contenuto in P (indicato con Q)***

Dim.

* Se
* Se P ha un ottimo illimitato si ha
* Se e esiste almeno una soluzione ottima con valore ottimo finito

Sia

Per ogni soluzione ottima di (P1) ***y: vale***

Per ogni soluzione ottima di (P1)

Le soluzioni ottime del problema (P1) sono tutte e sole quelle dell’insieme:

* è un poliedro
* è un poliedro

è un poliedro contenuto in P

Def. **Forma Standard**

Un sistema lineare si dice in ***forma standard (FS)*** se:

1. ***Tutte le variabili*** sono soggette a vincoli di ***non negativi***
2. ***Tutte le altre relazioni*** del sistema sono ***equazioni***

Un problema di PL si dice in Forma Standard se il suo sistema di vincoli (lineare) è in forma standard

N.B.

La Forma Standard riguarda solo la *forma del sistema dei vincoli e* ***non*** *la funzione obiettivo.*

In un problema di PL in forma standard ***la funzione obiettivo mantiene la sua forma originale***. Infatti:

* La sostituzione di una variabile libera con la coppia di variabili non negative ***non altera la funzione obiettivo***
* Ogni variabile slack aggiunta ha ***un coefficiente nullo nella funzione obiettivo***

Proprietà **Forma Standard**

1)

2)

3)

Def. **Forma Canonica Ammissibile (FCA)**

Un sistema lineare con *m* equazioni e *n* variabili si dice ***in forma canonica ammissibile se :***

1. Tutte le variabili sono soggette a vincoli di ***non*** negatività
2. Tutte le altre relazioni del sistema sono equazioni
3. Esiste un sottoinsieme di m variabili ciascuna ***univocamente associata*** a un vincolo (con coefficiente 1 in quel vincolo e 0 altrove)
4. Tutti i termini noti sono non negativi

N.B

La *Forma Canonica Ammissibile* e la *Forma Standard* coincidono quando i vincoli del problema sono nella forma:

Th. **Esistenza FCA**

Dato un problema in Forma Standard (FS)

Esiste FCA equivalente a al Problema dato Esiste una *soluzione di* ***FS*** a ***componenti non negative***

Def. **SBA**

Sia , con e . Un punto ***x è una SBA di S*** se e solo se, in corrispondenza di una scelta di indici B in {1,…,m}, A può essere decomposta in e in modo tale che con

Dove è una matrice quadrata di ordine *m* invertibile e tale che

Th.

Sia P un poliedro non vuoto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. x è ***un vertice*** di P
2. x è ***un punto estremo*** di P
3. x è una ***SBA*** del sistema S in FS equivalente a P