Def. **Ottimizzazione**

Ottimizzazione significa massimizzazione o minimizzazione di una funzione di un insieme di variabili, soggetta ad alcuni vincoli sui possibili valori che tali variabili possono assumere.

Def. **Modello Matematico**

Il modello (matematico) è una descrizione, per mezzo di relazioni di tipo logico-matematico, del problema di interesse. Il problema viene rappresentato attraverso un insieme di dati noti e variabili incognite che interagiscono in un unico sistema di relazioni.

Def. **Variabili decisionali**

Le quantità su cui è possibile intervenire e che sono oggetto di decisione

Def**. Funzione obiettivo**

La quantità che si vorrebbe massimizzare o minimizzare espressa come funzione delle variabili

Def. **Vincoli**

Restrizioni sui valori che le variabili decisionali possono assumere

**PROGRAMMAZIONE LINEARE**

Ass. **Continuità**

Una variabile di decisione può assumere tutti i valori reali (nel suo intervallo di ammissibilità) e quindi le variabili posso avere valore frazionario. Una variabile può assumere un qualsiasi valore reale, quindi anche un valore intero (ma non necessariamente)

Ass. **Certezza**

I valori dei parametri che definiscono un problema (input) sono considerati *certi* (veri) e quindi la significatività del modello e la sua soluzione sono strettamente legati ad essi. In una stesso modello, valori differenti dei parametri generano una diversa realizzazione dello stesso problema.

Ass. **Proporzionalità**

Il contributo di una variabile di decisione in ogni funzione è proporzionale secondo una costante moltiplicativa alla quantità rappresentata dalla variabile stessa

Ass. **Additività**

Il contributo di più variabili di decisione in ogni funzione è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.

Def. **Funzione Lineare**

Una funzione reale di n variabili reali si dice lineare se valgono le seguenti condizioni:

1. per ogni coppia di vettori reali x, y si ha:
2. per ogni vettore reale x e ogni scalare λ si ha:

Prop.

Una qualsiasi funzione lineare può essere scritta nella forma:

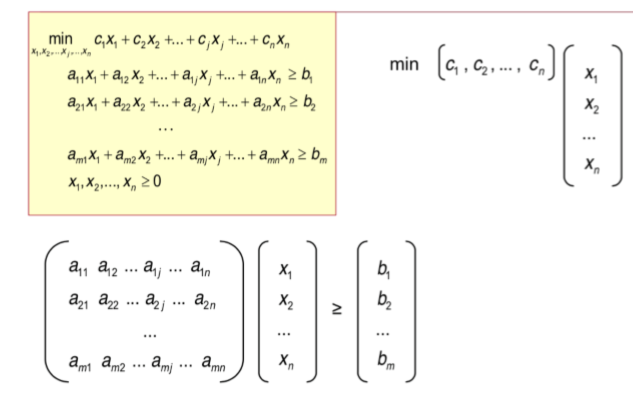
Dim.

Una funzione della forma soddisfa sempre le condizione i) e ii) della definizione della funzione lineare

Quindi sia una funzione che soddisfa le condizione i) e ii) e sia la base canonica dello spazio vettoriale per cui, per ogni x in si ha:

Utilizzando proprietà di linearità si può scrivere:

Def. **Min**



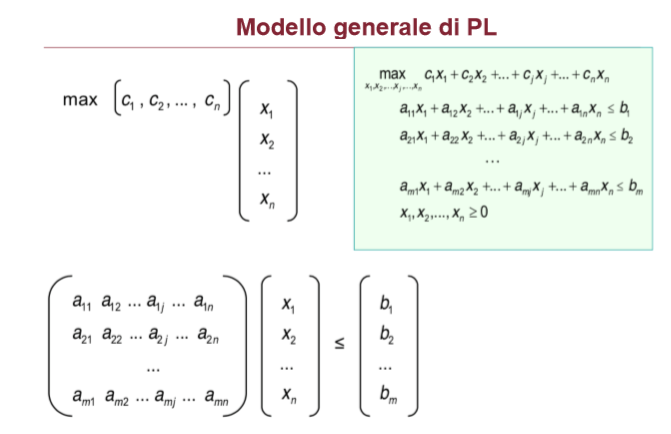
Minimizzazione dell’input (risorsa) per realizzare un prefissato livello di output (prestazione) minimo richiesto

Prop.

Il problema può essere sempre ricondotto alla forma :

Dim.

Def. **Max**



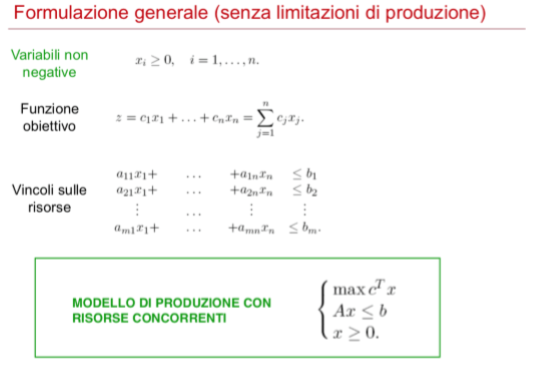
Massimizzazione dell’output (prestazione) ottenibile da una prefissata quantità di input (risorsa) massima disponibile

Prop.

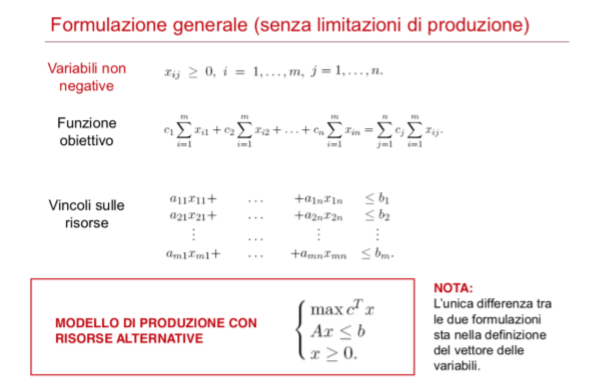
Il problema può essere sempre ricondotto alla forma :

Dim.

**Modello Produzione con *Risorse Concorrenti***



**Modello di Produzione con *Risorse Alternative***



**Formulazione Problema Trasporto M1**

origini e destinazioni

Si indichi la quantità disponibile all’origine *i* con e la quantità richiesta alla destinazione *j*

Si inoltre il costo unitario di trasporto dall’origine *i* alla destinazione *j*

Teo. **Modello Trasporto Bilanciato (M1)**

Il modello del trasporto M1 ammette soluzioni ammissibili se e solo se nella realizzazione del problema l’offerta eguaglia la domanda totale, nel qual caso il problema di trasporto si dice bilanciato. (Domanda Totale = Offerta Totale)

Oss.

Se ***Offerta > Domanda*** vi è la possibilità di soddisfare pienamente la domanda (il problema è ammissibile). Se la quantità di energia prodotta in eccesso non verrà inviata alle città, si verificheranno *giacenze nelle origini*, mentre, se tutta l’energia prodotta verrà inviata fuori dalle origini, la quantità in eccesso andrà persa perché non verrà utilizzata dalle città, si genereranno *giacenze nelle destinazioni*. ( ***Alcuni vincoli potranno essere non attivi*** -> giacenza)

Se ***Offerta < Domanda*** non vi è possibilità di soddisfare tutte le domande delle città perché nelle origini considerate non si produce energia a sufficienza. La realizzazione del problema è non ammissibile.

**Formulazione Problema Trasporto M2**

origini e destinazioni

Si indichi la quantità disponibile all’origine *i* con e la quantità richiesta alla destinazione *j*

Si inoltre il costo unitario di trasporto dall’origine *i* alla destinazione *j*

Def. **Spazio Vettoriale**

Si definisce uno spazio vettoriale (o spazio lineare) di dimensione n (e si indica con ) un ***insieme di vettori in*** chiuso rispetto alle operazioni di

1. Somma tra due vettori
2. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Lo stesso è uno spazio vettoriale di dimensione n

Def. **Punto di Ottimo**

Il punto di Ottimo si trova nell’intersezione delle due rette che delimitano la regione in cui i vincoli sui vari requisiti del problema sono soddisfatti.

Lemma

Sia data la seguente famiglia di rette parallele

Con e reali fissati e c in R. Il vettore  individua una *direzione ortogonale*  alle rette della famiglia ed è orientato dalla parte in cui si trovano le rette della famiglia ottenute per valori crescenti di c, cioè dalla parte in cui ci si sposta dalla retta verso nel semipiano

Dim.

Dobbiamo dimostrare:

1. Il vettore individua una ***direzione ortogonale*** alle rette

Consideriamo un valore c fissato e due punti v e w appartenenti alla retta tale che:

e

Sottraendo si ottiene :

Infatti si ha che

1. Fissato c, il vettore è  ***orientato da verso il semipiano***

Consideriamo un valore c fissato e un punto ***y tale che***

Si ha che : e

Sottraendo si ottiene:

Infatti si ha:

**Metodi Ricerca Soluzione Ottima**

1. ***Enumerativo***
   1. Valutazione le funzione obiettivo in tutti i punti di intersezione tra le due rette per individuare poi i vertici
      1. Per Ogni punto di *intersezione* si deve eseguire un controllo di appartenenza del punto alla regione ammissibile
   2. Valutare la funzione obiettivo in tutti i vertici
      1. ***Bisogna saper riconoscere i vertici*** 
         1. I Vertici della regione potrebbero essere comunque troppi per una enumerazione
      2. Occorre una strategia per una valutazione sistematica dei vertici nella regione ammissibile
2. ***Strategia del metodo del Simplesso***
   1. A partire da un vertice ammissibile viene generata una sequenza di vertici ammissibili adiacenti, che corrispondono cioè a “estremi” opposti dello stesso “spigolo”.
      1. La strategia del metodo del Simplesso è migliore di quella del metodo enumerativo ma che essa ***non*** è efficiente dal punto di vista teorico, ma è efficiente in pratica